

Тема: Розв'язування типових вправ

Мета:

- *Навчальна:* систематизувати та узагальнити знання учнів за темою інтеграл та його застосування;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити визначений інтеграл, площу криволінійної трапеції та застосовувати отримані знання на практиці;
- *Виховна:* виховувати наполегливість, інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- *Соціальна та громадянська компетентності:*
 - **Уміння:** висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аргументувати та відстоювати свою позицію; співпрацювати в команді, виділяти та виконувати власну роль в командній роботі;
 - **Ставлення:** ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших незалежно від статків, соціального походження; відповідальність за спільну справу; налаштованість на логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновків; повага до прав людини, активна позиція щодо боротьби із дискримінацією.

Тип уроку: закріплення знань та вмінь;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

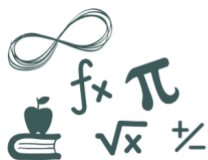
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Сформулюйте означення криволінійної трапеції
(Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $y = f(x) \geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називається **криволінійною трапецією**)
- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
($S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$)



- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b ($a < b$), належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$
- Як обчислити визначений інтеграл?
 1. Знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
 2. Обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
 3. Знайти різницю $F(b) - F(a)$;Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Що ви знаєте про формулу Ньютона-Лейбніца?
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

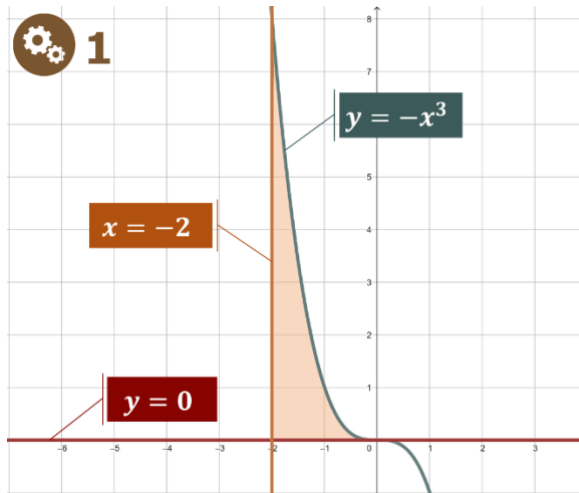
III. Розв'язування задач

№1

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

- 1) Графіком функції $y = -x^3$ і прямими $y = 0$, $x = -2$
- 2) Гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$

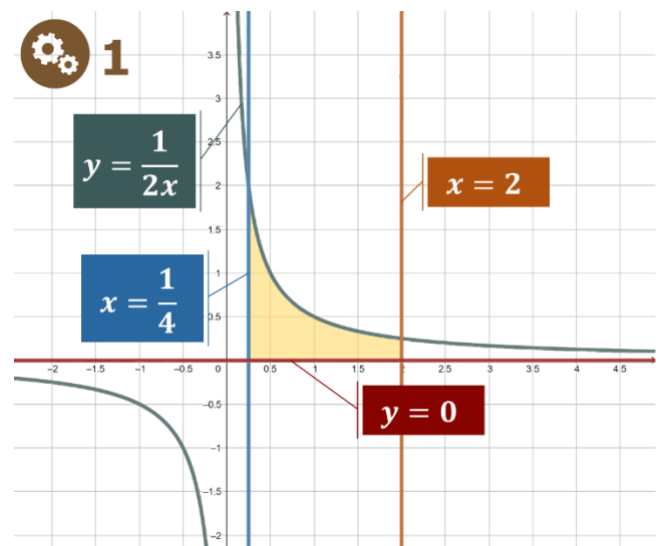
Розв'язок:



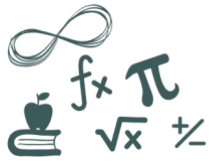
1) Графіком функції $y = -x^3$ і
прямими $y = 0$, $x = -2$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (-x^3) dx = \left(-\frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{(-2)^4}{4} \right) = \frac{16}{4} \\ &= 4 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

2) Гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ і
прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x| \Big|_{\frac{1}{4}}^2 = \frac{1}{2} \ln|2| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2^{-2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2) \ln 2 \right) \left(\begin{array}{l} \text{За теоремою про} \\ \text{логарифм степеня} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2 \\ &= \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2^3 = \frac{1}{2} \ln 8 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$



Обчисліть визначений інтеграл:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin x + 2 \cos x) dx$$

$$2) \int_1^e \left(\frac{1}{x} - x \right) dx$$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin x + 2 \cos x) dx &= (-4 \cos x + 2 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-4 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} \right) - (-4 \cos 0 + 2 \sin 0) \\ &= -4 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \cos 0 - 2 \sin 0 = 0 + 2 + 4 - 0 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_1^e \left(\frac{1}{x} - x \right) dx &= \left(\ln|x| - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^e = \ln e - \frac{e^2}{2} - \ln 1 + \frac{1^2}{2} = 1 - \frac{e^2}{2} - 0 + \frac{1}{2} \\ &= 1,5 - \frac{e^2}{2} \end{aligned}$$

№3

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

$$1) y = \frac{4}{x}, y = 1, x = 1$$

$$2) y = x^3, y = x^2$$

$$3) y = \frac{4}{x}, y = 4, x = 4$$

$$4) y = e^x, y = e, x = 0$$

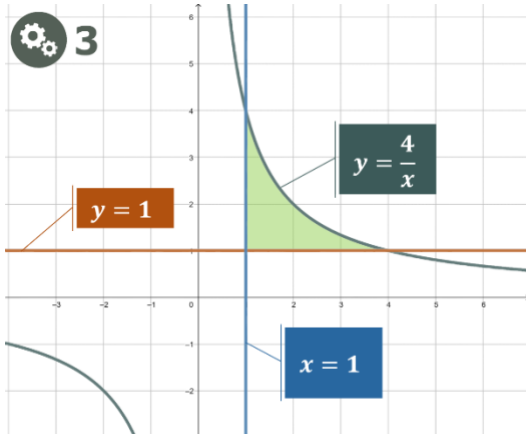
$$5) y = x^2 - 4x + 5, y = 5$$

$$6) y = \frac{7}{x}, x + y = 8$$

$$7) y = 2 + x - x^2, y = 2 - x$$



Розв'язок:



1) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$

Маємо тільки одну межу інтегрування. Знайдемо іншу межу інтегрування, для цього знайдемо точку перетину графіків $y = \frac{4}{x}$ і $y = 1$:

$$\frac{4}{x} = 1 \Rightarrow x = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Верхня межа} \\ \text{інтегрування} \end{array} \right)$$

- Для знаходження площі фігури обмеженої даними лініями необхідно від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = \frac{4}{x}$, віссю Ox та прямими $x = 1$ і $x = 4$, відняти площу прямокутника утвореного прямими $x = 1$, $y = 1$, віссю Ox та прямою $x = 4$

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \frac{4}{x} dx - (1 \cdot (4 - 1)) = 4 \ln|x| \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 4 \ln 1 - 3 \\ &= \ln 4^4 - 0 - 3 = \ln 256 - 3 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

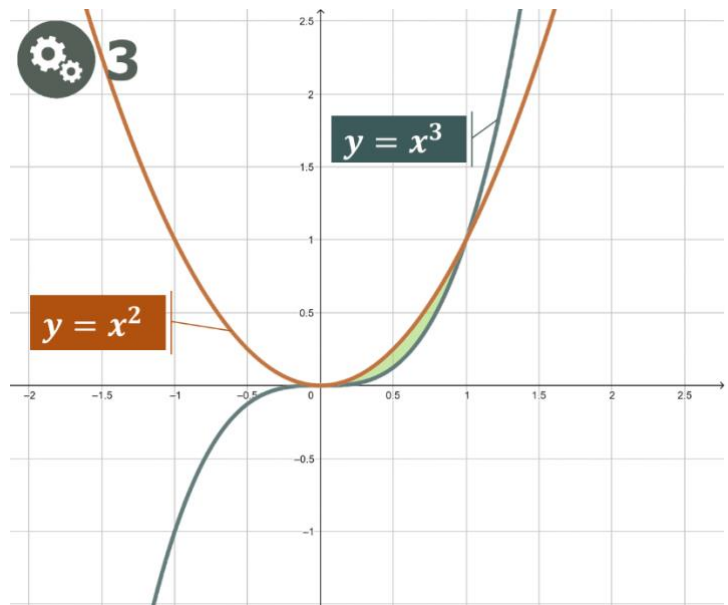
Відповідь: $\ln 256 - 3$

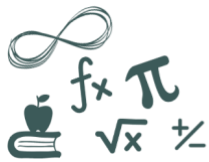
2) $y = x^3$, $y = x^2$

Знайдемо межі інтегрування:

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \\ x^3 - x^2 &= 0 \\ x^2(x - 1) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

- Для знаходження площі фігури обмеженої даними лініями необхідно від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = x^2$, віссю Ox ,





прямими $x = 0$ і $x = 1$ відняти площу криволінійної трапеції утвореної графіком функції $y = x^3$, віссю Ox , прямими $x = 0$ і $x = 1$.

$$S = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{1}{12} \text{ (кв.од.)}$$

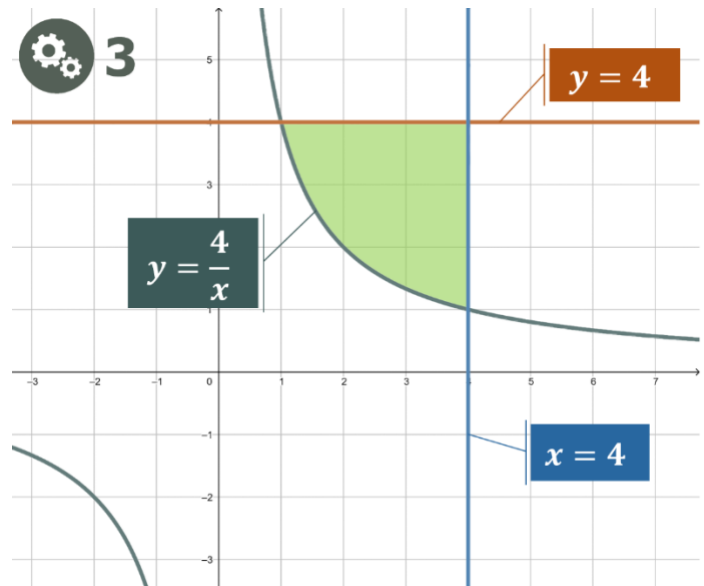
3) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$

Маємо тільки одну межу інтегрування. Знайдемо іншу межу інтегрування, для цього знайдемо точку перетину графіків

$y = \frac{4}{x}$ і $y = 4$:

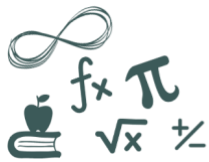
$$\frac{4}{x} = 4$$

$$x = 1 \text{ (Нижня межа інтегрування)}$$

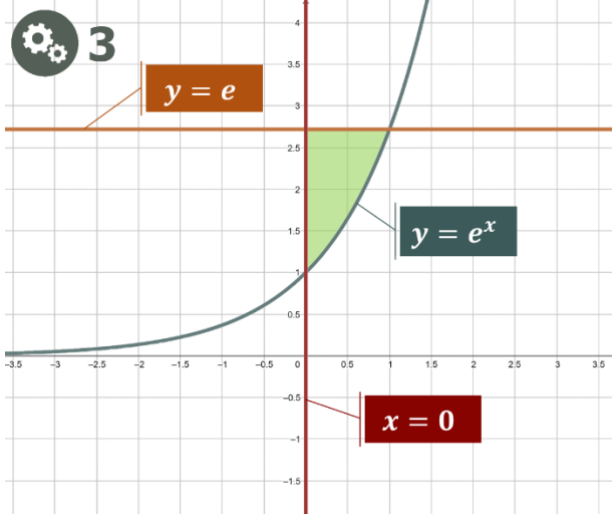


- Для знаходження площі фігури обмеженої даними лініями необхідно від площі квадрата, утвореного прямими $x = 1$, $x = 4$, $y = 4$ та віссю Ox відняти площу криволінійної трапеції утвореної графіком функції $y = \frac{x}{4}$, віссю Ox та прямими $x = 1$ і $x = 4$

$$S = (4 \cdot (4 - 1)) - \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 12 - \left(4 \ln|x| \Big|_1^4 \right) = 12 - (4 \ln 4 - 4 \ln 1) = 12 - (\ln 4^4 - 0) = 12 - \ln 256 \text{ (кв. од.)}$$



Відповідь: $12 - \ln 256$ (кв. од.)



4) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$

Маємо тільки одну межу інтегрування. Знайдемо іншу межу інтегрування, для цього знайдемо точку перетину графіків $y = e^x$ і $y = e$:

$$e^x = e$$

$$x = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Верхня межа} \\ \text{інтегрування} \end{array} \right)$$

- Для знаходження площі фігури обмеженої даними лініями необхідно від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = e$, віссю Ox та прямими $x = 0$ і $x = 1$ відняти площу криволінійної трапеції утвореної графіком функції $y = e^x$, віссю Ox та прямими $x = 0$ і $x = 1$.

$$S = \int_0^1 e dx - \int_0^1 e^x dx = \int_0^1 (e - e^x) dx = (ex - e^x) \Big|_0^1$$

$$= (e - e^1) - (e \cdot 0 - e^0) = e^0 = 1 \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: 1 (кв. од.)

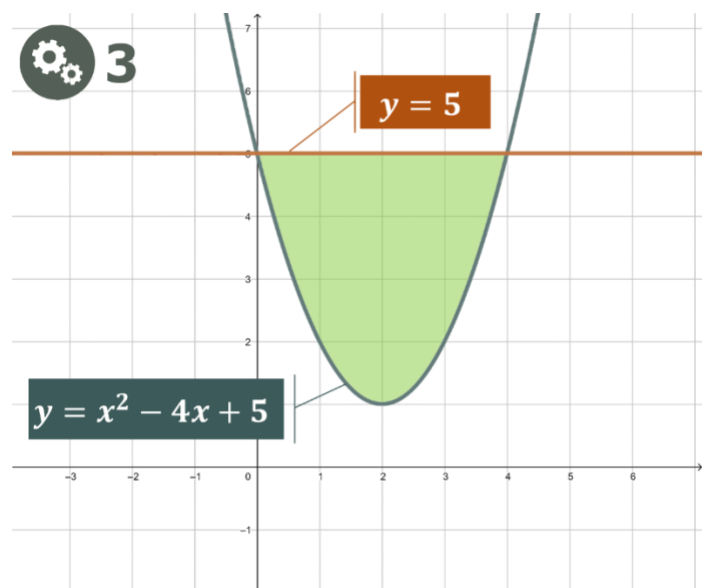
5) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$

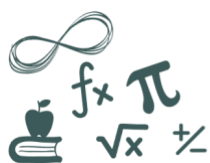
Так як $a > 0$ ($y = ax^2 + bx + c$) – вітки параболи напрямлені вгору.

- Знайдемо координати вершини параболи.

$$x_0 = \frac{-b}{2a};$$

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a};$$





$$x_0 = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

$$y_0 = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4} = -\frac{16 - 20}{4} = -\frac{-4}{4} = 1$$

- Знайдемо межі інтегрування, для цього знайдемо точки перетину графіку функції $y = x^2 - 4x + 5$ та прямої $y = 5$

$$x^2 - 4x + 5 = 5$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

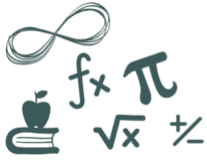
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

- Для знаходження площі фігури обмеженої даними лініями необхідно від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = 5$, віссю Ox , прямими $x = 0$ і $x = 4$, відняти площу криволінійної трапеції утвореної графіком функції $y = x^2 - 4x + 5$, віссю Ox , прямими $x = 0$ і $x = 4$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 5dx - \int_0^4 (x^2 - 4x + 5)dx = \int_0^4 (5 - (x^2 - 4x + 5))dx \\ &= \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right) \Big|_0^4 \\ &= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{4 \cdot 4^2}{2}\right) - 0 = -\frac{64}{3} + \frac{64}{2} = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} \\ &= \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $10\frac{2}{3}$ (кв.од.)



6) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$

- Знайдемо межі інтегрування, для цього знайдемо точки перетину графіків функції $y = \frac{7}{x}$ та $y = 8 - x$

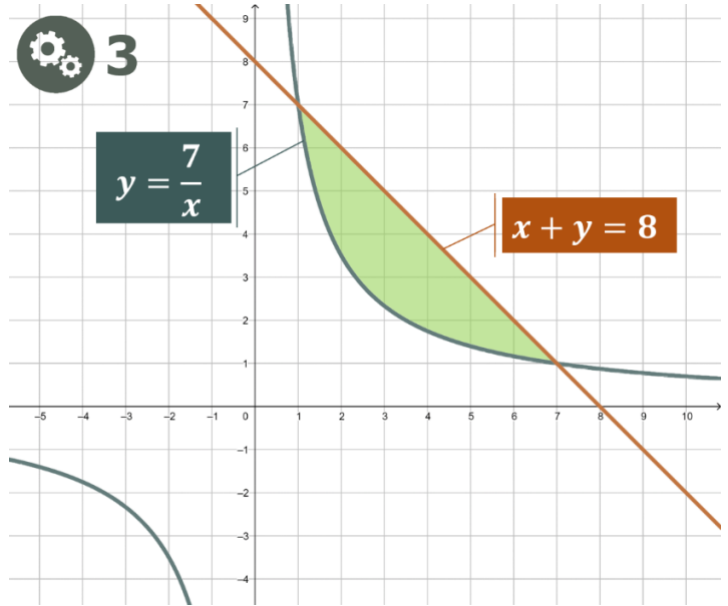
$$\begin{aligned}\frac{7}{x} &= 8 - x \\ \frac{7}{x} - 8 + x &= 0 \\ 7 - 8x + x^2 &= 0 \\ x^2 - 8x + 7 &= 0\end{aligned}$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ (Межі інтегрування)

- Для знаходження площі фігури обмеженої даними лініями необхідно від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = 8 - x$, віссю Ox та прямими $x = 1$ і $x = 7$, відняти площу криволінійної трапеції утвореної графіком функції $y = \frac{7}{x}$, віссю Ox та прямими $x = 1$ і $x = 7$.

$$\begin{aligned}S &= \int_1^7 (8 - x) dx - \int_1^7 \left(\frac{7}{x}\right) dx = \int_1^7 \left(8 - x - \frac{7}{x}\right) dx \\ &= \left(8x - \frac{x^2}{2} - 7 \ln|x|\right) \Big|_1^7 \\ &= \left(8 \cdot 7 - \frac{7^2}{2} - 7 \ln 7\right) - \left(8 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 7 \ln 1\right) \\ &= 56 - \frac{49}{2} - 7 \ln 7 - 8 + \frac{1}{2} + \ln 1^7 = 24 - 7 \ln 7 \text{ (кв. од.)}\end{aligned}$$

Відповідь: $24 - 7 \ln 7$ (кв. од.)





7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$

Так як $a < 0$ ($y = ax^2 + bx + c$) – вітки параболи напрямлені вниз.

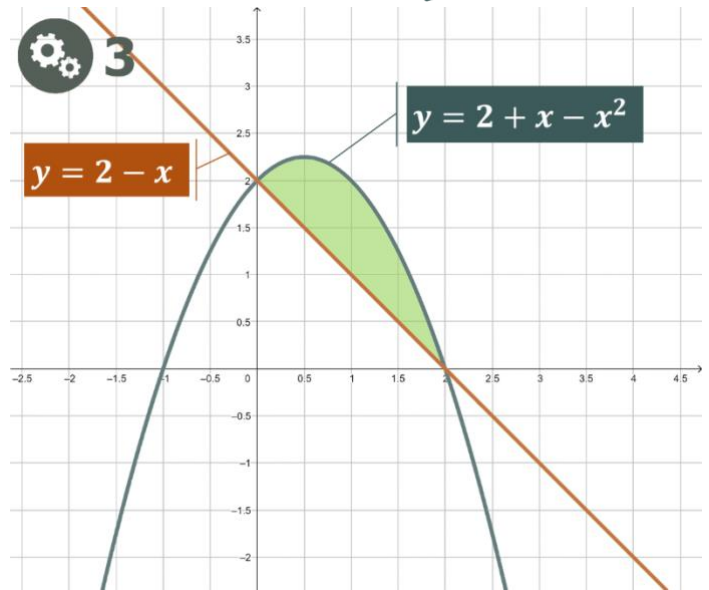
- Знайдемо координати вершини параболи.

$$x_0 = \frac{-b}{2a};$$

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a};$$

$$x_0 = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = -\frac{1^2 - (4 \cdot (-1) \cdot 2)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{9}{-4} = 2\frac{1}{4}$$



- Знайдемо точки перетину графіку функції $y = 2 + x - x^2$ з віссю Ox

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

- Знайдемо межі інтегрування, для цього знайдемо точки перетину графіків функції $y = 2 + x - x^2$ і $y = 2 - x$

$$2 + x - x^2 = 2 - x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \text{ Межі інтегрування}$$

- Для знаходження площі фігури обмеженої даними лініями необхідно від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = 2 + x - x^2$, віссю Ox , прямими $x = 0$ і $x = 2$, відняти площу криволінійної трапеції утвореної графіком функції $y = 2 - x$, віссю Ox , прямими $x = 0$ і $x = 2$



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (2 + x - x^2) dx - \int_0^2 (2 - x) dx = \int_0^2 (2 + x - x^2 - 2 + x) dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $1\frac{1}{3}$ (кв. од.)

№4

При яких значеннях a виконується нерівність:

- 1) $\int_0^a (4 - 2x) dx < 3$, де $a > 0$
- 2) $\int_{\log_{0,2} 6}^a 0,2^x dx > \frac{19}{\ln 0,2}$, де $a > \log_{0,2} 6$

Розв'язок:

$$1) \int_0^a (4 - 2x) dx = \left(4x - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^a = (4x - x^2) \Big|_0^a = (4a - a^2) - 0 = 4a - a^2$$

$$4a - a^2 < 3$$

$$4a - a^2 - 3 < 0$$

$$a^2 - 4a + 3 > 0$$

$$f(x) = a^2 - 4a + 3$$

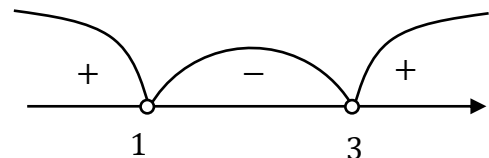
$$\text{ОДЗ: } a \in \mathbb{R}$$

Нулі функції:

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

*Записуючи відповідь, враховуємо,
що за умовою $a > 0$



Відповідь: $a \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$



$$\begin{aligned} 2) \int_{\log_{0,2} 6}^a 0,2^x dx &= \frac{0,2^x}{\ln 0,2} \Big|_{\log_{0,2} 6}^a = \frac{0,2^a}{\ln 0,2} - \frac{0,2^{\log_{0,2} 6}}{\ln 0,2} = \frac{0,2^a}{\ln 0,2} - \frac{6}{\ln 0,2} \\ &= \frac{0,2^a - 6}{\ln 0,2} \end{aligned}$$

$$\frac{0,2^a - 6}{\ln 0,2} > \frac{19}{\ln 0,2}$$

**Помножимо обидві частини нерівності на $\ln 0,2$ та змінимо знак на протилежний, так як $\ln 0,2 < 1$*

$$0,2^a - 6 < 19$$

$$0,2^a < 25$$

$$\frac{1^a}{5} < 25$$

$$5^{-a} < 5^2$$

$$-a < 2$$

$$a > -2$$

**Записуючи відповідь, враховуємо, що за умовою $a > \log_{0,2} 6$*

Відповідь: $a \in (\log_{0,2} 6; +\infty)$

№5

При яких значеннях a площа фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 9?

Розв'язок:

Розглянемо два випадки: $a > 0$ і $a < 0$:

1) $a > 0$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3} \\ \frac{a^3}{3} &= 9 \\ a^3 &= 27 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

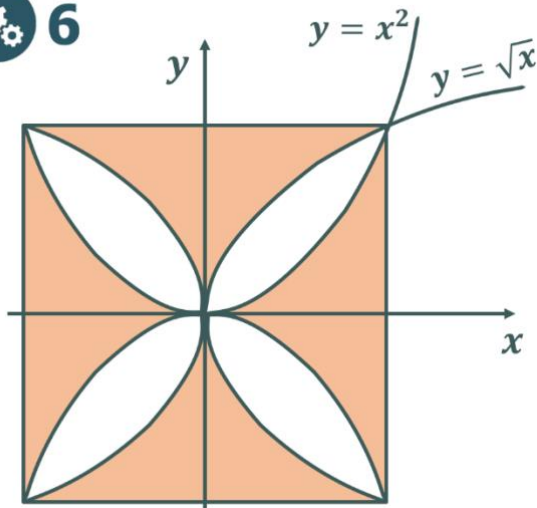
2) $a < 0$



$$\begin{aligned} S &= \int_a^0 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^0 = 0 - \frac{a^3}{3} = -\frac{a^3}{3} \\ -\frac{a^3}{3} &= 9 \\ a^3 &= -27 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

Відповідь: 3; -3

№6



Знайдіть площу зафарбованої частини фігури.

Розв'язок:

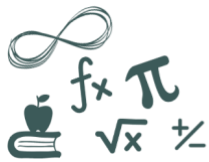
➤ Для знаходження площі зафарбованої фігури необхідно від площі квадрата відняти суму площ чотирьох пелюсток.

➤ Знайдемо точку перетину графіків функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x} \\ x &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{сторона квадрата дорівнює } 2$$

$$S_{\text{кв.}} = 2^2 = 4 \text{ (кв.од.)}$$

➤ Знайдемо площу однієї пелюстки, для цього від площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \sqrt{x}$, віссю Ox та прямими $x = 0$ і $x = 1$ віднімемо площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^2$, віссю Ox та прямими $x = 0$ і $x = 1$.



$$\begin{aligned} S_{\text{пелюстки}} &= \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt{x} + x^2) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

➤ Від площі квадрата відніmemo площу 4-х пелюсток

$$S = S_{\text{кв}} - 4S_{\text{п}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}$$

IV. Підсумок уроку

- Сформулюйте означення криволінійної трапеції
(Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $y = f(x) \geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називається **криволінійною трапецією**)
- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
($S = F(b) - F(a)$), де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$)
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b ($a < b$), належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$
- Як обчислити визначений інтеграл?
 - Знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
 - Обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
 - Знайти різницю $F(b) - F(a)$;Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

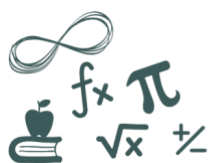
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Що ви знаєте про формулу Ньютона-Лейбніца?

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



V. Домашнє завдання

| | |
|---|--------------|
| Повторити §2 Виконати завдання №2 «Перевірити себе» (1-9) на ст.67, підготуватися до самостійної роботи | Мерзляк А.Г. |
| Повторити §8-10 Виконати завдання для перевірки знань (1-6) на ст.118, підготуватися до самостійної роботи | Істер О.С. |
| Повторити §6-7 Виконати завдання для підготовки до оцінювання (1-2) на ст.102, підготуватися до самостійної роботи | Нелін Є.П. |
| Повторити §5-8 Виконати тематичні тести (1-6) на ст.74, підготуватися до самостійної роботи | Бевз Г.П. |